Вопросы к экзамену по курсу “Приложения теории операторов и функционального анализа”. Группа МСМТ 233. Лето 2024
В. Лебедев

На экзамене студент получает билет, содержащий два вопроса из этого вопросника, и две задачи от экзаменатора. Пользоваться вопросником разрешается. Результирующая оценка = 0,5 накопленная оценка + 0,5 оценка на экзамене.

1. Выведите формулы двойственности для операций пересечения и объединения.

2. Определите понятие эквивалентности $X \sim Y$ множеств X и Y по Кантору.

3. Дайте определение счетного множества. Докажите, что множество Q рациональных чисел является счетным. Докажите, что множество Q^n является счетным. Является ли Q^∞ счетным?

4. Докажите, что объединение не более чем счетного набора счетных множеств является счетным.

5. Докажите, что при добавлении к бесконечному множеству конечного или счетного множества получается множество эквивалентное исходному.

6. Что такое несчетное множество? Докажите, что прямая R является несчетным множеством; выведите отсюда существование трансцендентных чисел.

7. Дайте определение континуального множества. Докажите континуальность множеств R^d, R^∞.

8. Расскажите о понятии мощности $|X|$ множества X. Что означают записи $|X| = |Y|$, $|X| \geq |Y|$, $|X| > |Y|$? Сформулируйте теорему Кантора–Бернштейна о сравнении множеств.

9. Докажите, что множество $C(I)$ непрерывных функций на отрезке I является континуальным.

10. Докажите, что множество всех подмножеств множества X имеет мощность большую, чем мощность X.

11. Изложите (схематично) построение меры Лебега в R^d. Приведите примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и на плоскости.

Докажите, что всякое счетное множество имеет меру нуль. Приведите пример несчетного множества на прямой, имеющего меру нуль (троичное множество Кантора).

12. Докажите, что всякое открытое множество в R^d и всякое замкнутое множество в R^d — измеримо.

13. Докажите существование неизмеримых по Лебегу множеств.

14. Сформулируйте теорему о замкнутости класса измеримых множеств относительно операций (счетного) объединения, пересечения и перехода к дополнению.

15. Дайте определение измеримой функции. Покажите, что класс измеримых функций замкнут относительно арифметических операций.

16. Что означает фраза "свойство X выполнено почти всюду"? Дайте определение сходимости последовательности функций почти всюду и сходимости по мере. Сформулируйте теорему об их связи. Приведите примеры.

17. Сформулируйте теорему о п.в. пределе последовательности измеримых функций.

18. Сформулируйте теоремы Егорова и Лузина об исправлении на множестве малой меры.

19. Определите интеграл Лебега (включая интеграл по всему R^d — ограничтесь одномерным случаем). Сформулируйте и поясните его основные свойства (линейности и правило интегрирования неравенств).

20. Опишите связь между интегралом Лебега и интегралом Римана (включая случай несобственного интеграла Римана).

21. Сформулируйте теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и ее следствие для рядов.

22. Дайте определение интеграла в случае абстрактного пространства с мерой.

23. Что такое функция распределения? Определите меру Стилтьеса на R. Что такое абсолютно непрерывная мера? Что такое дискретная мера. Что такое интеграл Стилтьеса? Как вычисляется интеграл по абсолютно непрерывной и по дискретной мере.

24. Дайте определение метрического пространства. Определите пространства l^2, l^1, l^∞, $C([a,b])$, $BC(R)$. Определите пространства $L^1(X)$, $L^2(X)$ (в случае произвольного пространства с мерой). Что такое подпространство метрического пространства?

25. Дайте определение открытого шара $B(x_0, r)$ и окрестности точки в метрическом пространстве.

26. Дайте определение предела последовательности точек в метрическом пространстве. Докажите единственность предела.

27. Сравните сходимость в l^2 с покоординатной сходимостью. Сделайте тоже самое для l^1 и l^∞.

28. Сравните сходимость в $C[a, b]$ с поточечной сходимостью и со сходимостью в $L^2[a, b]$ и $L^1[a, b]$.

29. Дайте определение внутренней точки множества в метрическом пространстве и дайте определение открытого множества. Приведите примеры открытых множеств. Покажите, что открытый шар является открытым множеством.

30. Дайте определение предельной точки множества в метрическом пространстве. Дайте определение замыкания $\overline{E}$ множества E в метрическом пространстве. Выведите основные свойства операции замыкания: $E \subseteq \overline{E}$, $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$, $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$. Докажите, что $\overline{E \cap F} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$. Верно ли, что $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cap \overline{F}$?

31. Дайте определение замкнутого множества в метрическом пространстве. Докажите теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей.

32. Докажите, что замкнутый шар $\overline{B}(x_0, r)$ является замкнутым множеством.

33. Докажите, что дополнение к открытому множеству является замкнутым множеством, а дополнение к замкнутому является открытым.

34. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.

35. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством. Верно ли, что пересечение любого набора открытых множеств является открытым множеством? Приведите контрпример.

36. Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством. Верно ли, что объединение любого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством? Приведите контрпример.

37. Дайте определение множества плотного в некотором множестве метрического пространства. Докажите, что если A плотно в B и B плот-

но в C, то A плотно в C.

38. Что такое всюду плотное множество? Что такое нигде не плотное множество? Приведите примеры. Докажите, что множество $\{x : x(0) = 0\}$ замкнуто и нигде не плотно в $C[0, 1]$.

39. Докажите, что множество $\{x : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}$ замкнуто и нигде не плотно в l^1 и всюду плотно в l^2.

40. Дайте определение сепарабельного метрического пространства. Докажите сепарабельность прямой R. Докажите сепарабельность R^d.

41. Докажите, что пространство l^2 сепарабельно. Докажите, что пространство l^1 сепарабельно. Докажите, что l^∞ не сепарабельно.

42. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о многочленах и выведите из нее сепарабельность пространства $C([a, b])$.

43. Сформулируйте утверждение о сепарабельности пространств $L^1[a, b], L^1(R), L^2[a, b], L^2(R)$. Укажите в каждом из них счетное всюду плотное множество. Для какого-нибудь из указанных пространств приведите доказательство. Сепарабельно ли $BC(R)$?

44. Дайте определение полного метрического пространства. Докажите полноту прямой R. Приведите пример метрического пространства, не являющегося полным.

45. Докажите полноту пространства R^d

46. Докажите полноту пространств l^2, l^1.

47. Докажите полноту пространств $l^\infty, C([a, b])$.

48. Докажите, что если X — полное метрическое пространство и Y его подпространство, то Y полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

49. Дайте определение непрерывного отображения одного метрического пространства в другое.

50. Дайте определение сжимающего отображения в метрическом пространстве, приведите примеры. Является ли отображение $t \to \sin t$ сжимающим как отображение прямой R в себя?

51. Докажите теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Выведите оценку расстояния между n -ой итерацией и неподвижной точкой.

52. Дайте определение вполне ограниченного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Покажите, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным. Верно ли обратное (рассмотрите шар в l^2)?

53. Докажите, что в R^d понятия "ограниченность" и "вполне ограниченность" совпадают.

54. Что называется ε -сетью для множества K в метрическом пространстве? Покажите, что K является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть для K.

55. Дайте определение компактного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о связи вполне ограниченности и компактности.

56. Докажите теорему Вейерштрасса о непрерывных функциях на компактных множествах. Приведите пример, показывающий, что условие компактности множества в этой теореме нельзя заменить условием ограниченности и замкнутости.

57. Докажите теорему Арцела (критерий вполне ограниченности множества в $C[a,b]$). Проиллюстрируйте ее применение на примерах.

58. Сформулируйте критерии вполне ограниченности множества в l^2 и l^1. Выведите один из них. Проиллюстрируйте их применения (например, рассмотрите "гильбертов кирпич").