

**Вопросы к коллоквиуму**  
**“Сравнение множеств. Мера и интеграл”**  
**Приложения теории операторов и функционального анализа**  
**МСМТ 233, 4-й модуль 1-й курс**  
**2023/2024 учебный год**  
**В. Лебедев**

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника. Коллоквиум имеет характер блиц-опроса. Время на ответ 3–5 минут. Студент должен продемонстрировать знание определений и формулировок утверждений. Доказывать утверждения не требуется. Пользоваться вопросником разрешается.

1. Запишите формулы двойственности для операций пересечения и объединения.
2. Определите понятие эквивалентности  $X \sim Y$  множеств  $X$  и  $Y$  по Кантору.
3. Дайте определение счетного множества. Какие из следующих множеств являются счетными: множество  $Q$  рациональных чисел; множество  $Q^{2018}$ ; множество  $Q^\infty$ ?
4. Всегда ли является счетным объединение не более чем счетного набора счетных множеств?
5. Пусть  $X$  бесконечное множество и  $A$  не более чем счетное. Эквивалентны ли множества  $X$  и  $X \cup A$ ?
6. Является ли прямая  $R$  счетным множеством? Поясните, как ответ на этот вопрос влечет существование трансцендентных чисел. Что такое несчетное множество?
7. Дайте определение континуального множества. Являются ли континуальными множества  $R^d, R^\infty$ ? Укажите взаимно однозначное соответствие между  $R$  и  $R^\infty$ .
8. Расскажите о понятии мощности  $|X|$  множества  $X$ . Что означают записи  $|X| = |Y|$ ,  $|X| \geq |Y|$ ,  $|X| > |Y|$ ? Сформулируйте теорему Кантора–Бернштейна о сравнении множеств.
9. Является ли множество  $C(I)$  непрерывных функций на отрезке  $I$  континуальным? Почему?
10. Что можно сказать о мощности множества всех подмножеств множества  $X$  по сравнению с мощностью  $X$ .

11. Изложите (схематично) построение меры Лебега в  $R^d$ . Приведите примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и плоскости. Что можно сказать о мере счетного множества. Приведите пример несчетного множества на прямой, имеющего меру нуль (троичное множество Кантора).

12. Всякое ли множество на прямой измеримо (по Лебегу)? Изложите кратко построение контрпримера.

13. Сформулируйте утверждение о том, что класс измеримых множеств замкнут относительно операций (счетного) объединения, пересечения и перехода к дополнению. Поясните почему открытые и замкнутые множества являются измеримыми.

14. Что означает фраза “свойство  $X$  выполнено почти всюду”? Дайте определение сходимости последовательности функций почти всюду и сходимости по мере. Как они связаны между собой? Приведите примеры.

15. Дайте определение измеримой функции. Сформулируйте утверждение о том, что класс измеримых функций замкнут относительно арифметических операций и поточечного предельного перехода.

16. Сформулируйте теоремы Егорова и Лузина об исправлении на множестве малой меры.

17. Определите интеграл Лебега (включая интеграл по всему  $R^d$  — ограничьтесь одномерным случаем).

18. Опишите связь между интегралом Лебега и интегралом Римана (включая случай несобственного интеграла Римана).

19. Сформулируйте теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе.

20. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и ее следствии для рядов.

21. Дайте определение пространства с мерой и интеграла в случае абстрактного пространства с мерой.

22. Сформулируйте теорему о дифференцировании монотонной функции и теорему о дифференцировании интеграла.

23. Что такое функция распределения? Определите меру Стильеса на  $R$ . Что такое абсолютно непрерывная мера? Что такое дискретная мера.

24. Что такое интеграл Стильеса? Как вычисляется интеграл по абсолютно непрерывной и по дискретной мере.