АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ [1]

А.В. Перескоков[2] (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H}-\varepsilon\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{|q-q'|}+U(|q-q'|)\right)\mid\psi(q')\mid^2 dq')\psi=\lambda\psi, \qquad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=1, \qquad (2)$$

где

$$H=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Big)+\frac{q_1^2+q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\varepsilon>0$ — малый параметр, а $U=U(z)$ — непрерывно дифференцируемая при $z\geq 0$ функция, для которой справедливо разложение

$$U(z)=U_0+\frac{U_1}{z}+\frac{U_2}{z^2}+O\left(\frac{1}{z^3}\right),\quad z\to\infty.$$

Здесь U_0, U_1, U_2 — константы. Будем предполагать, что $U_1\neq -1$.

Теория квазиклассического приближения для операторов типа Хартри начала развиваться с середины 70 - х годов прошлого века. (см., например, работы В.П. Маслова, М.В. Карасева, И.В. Сименога, где рассматривались спектральные задачи). В статье [1] было изучено двумерное уравнение Хартри (1) с кулоновским потенциалом самодействия, в котором функция $U(z)$ равнялась нулю. В работе [2] результаты [1] были обобщены на уравнения более общего вида, в которых потенциал самодействия содержит дополнительное слагаемое $U(|q-q'|)$. Отметим, что при добавлении такого слагаемого сохраняется кулоновский характер особенности в потенциале самодействия.

Собственные значения задачи (1), (2) при $\varepsilon=0$ равны $\lambda_n=n+1$, $n=0,1,\ldots$. При $\varepsilon\to 0$ и при величине n порядка ε^{-1} серия

[1]Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012)

собственных значений задачи (1), (2) для $k = 0, 1, 2, \ldots$ задается асимптотической формулой [2]

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon) = n + 1 - \varepsilon U_0 -$$

$$-\frac{(U_1+1)\varepsilon \ln n}{2\pi\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon(\sigma_k + \nu_k - 8\ln 2 - \gamma)}{2\pi\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \quad n \to \infty, \ (3)$$

где γ– постоянная Эйлера, а число $\sigma_k = 0$, если $k = 0$, и

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j},$$

если $k \in \mathbb{N}$. Числа ν_k в разложении (3) определяются с помощью интеграла

$$\nu_k = -\frac{1}{\pi(k!)^2 2^{2k-1}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}\left(\frac{|s-\tau|}{\sqrt{2}}\right) e^{-\tau^2-s^2} H_k^2(\tau) H_k^2(s)\, d\tau ds,$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь

$$\hat{U}(z) = -\int_z^{\infty}\left(U'(\tau) + \frac{U_1\theta(\tau - \sqrt{1+z^2})}{\tau^2}\right)\sqrt{\tau^2 - z^2}\, d\tau +$$

$$+U_1\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{8}\right)\right), \quad \theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \le 0, \end{cases}$$

а $H_k(s)$ — полином Эрмита.

При $U_1 > -1$ разложение (3) описывает спектр оператора типа Хартри с кулоновской особенностью у потенциала самодействия вблизи нижних границ спектральных кластеров, а при $U_1 < -1$ — вблизи верхних границ кластеров. Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности.

Литература

1. Вахрамеева Д.А. Асимптотика спектра двумерного оператора типа Хартри с кулоновским потенциалом самодействия вблизи нижних границ спектральных кластеров / Д.А. Вахрамеева, А.В. Перескоков // Теор. мат. физ. — 2019. — Т. 199, № 3. — С. 445–459.

2. Pereskokov A.V. Semiclassical asymptotics of the spectrum of a two-dimensional Hartree type operator near boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2022. — V. 264, № 5. — P. 617–632.