ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ С КУЛОНОВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ САМОДЕЙСТВИЯ ВБЛИЗИ НИЖНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

А.В. Перескоков [2] (Москва, НИУ ВШЭ, НИУ МЭИ)
pereskokov62@mail.ru

Рассматривается задача на собственные значения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ для нелинейного оператора типа Хартри с кулоновским потенциалом самодействия $|q-q'|^{-1}$:

$$\Big(H - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|q-q'|} |\psi(q')|^2 dq'\Big)\psi = \lambda\psi, \tag{1}$$

$$||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \tag{2}$$

где

$$H = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Big) + \frac{q_1^2+q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Уравнения самосогласованного поля типа Хартри во внешнем поле играют фундаментальную роль в квантовой теории, в нелинейной оптике, а также при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в молекулах ДНК.

Особенностью данной задачи является то, что она относится к классу резонансных, поскольку обе частоты осциллятора равны 1. Кроме того, потенциал самодействия имеет особенность. Поэтому лучевой метод, а также общая теория комплексного ростка Маслова здесь не применимы. Мы воспользуемся тем, что после перехода к полярным координатам в уравнении (1) переменные разделяются.

Собственные значения задачи (1),(2) при $\varepsilon = 0$ равны $\lambda_n = n+1,\ n = 0,1,2...$. В данной работе показано, что при $\varepsilon \to 0$ и n порядка ε^{-1} для $k = 0,1,2,...$ собственные значения задачи (1),(2) задаются асимптотической формулой

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon) = n+1 - \frac{\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{n}}(\ln n + \gamma + 8\ln 2 - \sigma_k) + O\Big(\frac{\ln n}{n^3}\Big), n \to \infty, \tag{3}$$

---

[1]Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

где $\gamma-$ постоянная Эйлера, а числа σ_k определяются равенством

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{j}, & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Отметим, что при $k \to \infty$ справедливо разложение

$$\sigma_k = \ln k + \gamma + O\Big(1/k\Big).$$

Разложение (3) описывает спектр оператора типа Хартри с кулоновским потенциалом самодействия вблизи нижних границ спектральных кластеров, а соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружностей [1].

Данная работа продолжает цикл статей, посвященных изучению асимптотики спектра операторов типа Хартри вблизи границ спектральных кластеров. В статьях [2], [3] был рассмотрен случай гладкого потенциала самодействия, когда потенциал задается многочленом второй степени от квадрата расстояния. В [4] была получена формула для асимптотики спектра двумерного оператора Хартри с логарифмическим потенциалом самодействия вблизи верхних границ спектральных кластеров.

Литература

1. Вахрамеева Д.А. Асимптотика спектра двумерного оператора типа Хартри с кулоновским потенциалом самодействия вблизи нижних границ спектральных кластеров / Д.А. Вахрамеева, А.В. Перескоков // ТМФ. — 2019. — Т. 199, № 3. — С. 445–459.

2. Перескоков А.В. Квазиклассическая асимптотика спектра оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // ТМФ. — 2014. — Т. 178, № 1. — С. 88–106.

3. Перескоков А.В. Квазиклассическая асимптотика спектра вблизи нижних границ спектральных кластеров для оператора типа Хартри / А.В. Перескоков // Матем. заметки. — 2017. — Т. 101, вып. 6. — С. 894–910.

4. Перескоков А.В. Квазиклассическая асимптотика спектра двумерного оператора Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // ТМФ. — 2016. — Т. 187, № 1. — С. 74–87.