ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ С ЭКРАНИРОВАННЫМ КУЛОНОВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ САМОДЕЙСТВИЯ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ [1]

©2022 *А. В. Перескоков*
(Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ; *pereskokov62@mail.ru*)

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(-\Delta_q - \frac{1}{\mid q \mid} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\varkappa|q-q'|} \frac{\mid \psi(q') \mid^2}{\mid q - q' \mid} dq')\psi = \lambda\psi, \qquad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \qquad (2)$$

где Δ_q — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Здесь потенциал самодействия является экранированным кулоновским потенциалом (или потенциалом Юкавы)

$$V(q) = \frac{e^{-\varkappa|q|}}{\mid q \mid},$$

где $\varkappa > 0$ — константа.

Уравнения самосогласованного поля Хартри во внешнем поле, а также уравнения типа Хартри, в которых потенциал самодействия отличен от кулоновского, возникают в ряде моделей квантовой теории и нелинейной оптики. Изучению асимптотических решений таких уравнений, локализованных вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве, посвящено большое число работ начиная с работ В. П. Маслова [1] и И. В. Сименога [2]. Отметим также работу [3], где были найдены асимптотические

[1]Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022)

собственные значения оператора Хартри с кулоновским взаимодействием в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ вблизи верхних границ спектральных кластеров. Эти кластеры образуются около уровней энергии невозмущенного оператора. Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности Γ в $\mathbb{R}^3$, на которой кулоновский потенциал самодействия имеет логарифмическую особенность. В данной работе будут построены асимптотические собственные функции задачи (1), (2) при $\varkappa > 0$, которые также локализованы вблизи окружности Γ.

При $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1), (2) имеют вид

$$\lambda_n(0) = -\frac{1}{4n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где n — главное квантовое число. Пусть теперь ε не равно нулю. Рассмотрим случай, когда число n велико. Для определенности будем считать, что λ имеет порядок ε. Тогда n имеет порядок $\varepsilon^{-1/2}$.

Пусть $p = n - |m| - 1$, где m — магнитное квантовое число. В данной работе для каждого фиксированного $p = 0, 1, 2, \ldots$ найдены асимптотические собственные значения

$$\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon) = -\frac{1}{4n^2} + \frac{\varepsilon \alpha_i^{(p)}}{32\pi\varkappa^2 n^5} + O\left(\frac{\varepsilon}{n^6}\right), \quad n \to \infty,$$

вблизи верхних границ спектральных кластеров. Здесь i принимает конечное число значений $i = 0, \ldots, I_p$. В частности, при $p = 0$ существует одно число $\alpha_0^{(0)} = 4$, при $p = 1$ — два числа $\alpha_0^{(1)} = 3$, $\alpha_1^{(1)} = 2$, при $p = 2$ — шесть чисел $\alpha_0^{(2)} = 2 + 4/7$, $\alpha_1^{(2)} = 2 + 1/4$, $\alpha_2^{(2)} = 2$, $\alpha_3^{(2)} = 2 - 4/13$, $\alpha_4^{(2)} = 2 - 7/20$, $\alpha_5^{(2)} = 2 - 4/9$.

Наконец, вблизи окружности Γ, где локализовано решение (1), (2), главный член его асимптотического разложения

$\gamma = \gamma_i^{(p)}$ является решением задачи о двумерном осцилляторе: [4]

$$\mathbf{L}\gamma(\tau, s) = 0, \quad \|\gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1.$$

Здесь оператор $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) + \frac{s^2 + \tau^2}{2} - (p+1).$$

Отметим, что ранее в работе [5] для уравнения Хартри в случае ньютоновского взаимодействия с экранировкой была построена квазиклассическая серия собственных значений и сферически-симметричных собственных функций.

Литература

1. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. //М.: Наука, 1977. 384 с.

2. *Сименог И. В.* Об асимптотике решения стационарного нелинейного уравнения Хартри //Теоретическая и математическая физика. – 1977. – Т. 30. – №. 3. – С. 408-414.

3. *Перескоков А. В.* Асимптотика спектра оператора Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров. Асимптотические решения, локализованные вблизи окружности //Теоретическая и математическая физика. – 2015. – Т. 183. – №. 1. – С. 78-89.

4. *Перескоков А. В.* Асимптотика спектра оператора типа Хартри с экранированным кулоновским потенциалом самодействия вблизи верхних границ спектральных кластеров //Теоретическая и математическая физика. – 2021. – Т. 209. – №. 3. – С. 543-560.

5. *Карасев М. В., Маслов В. П.* Квазиклассические солитонные решения уравнения Хартри. Ньютоновское взаимодействие с экранировкой //Теоретическая и математическая физика. – 1979. – Т. 40. – №. 2. – С. 235-244.