РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О СПЕКТРЕ АТОМА ВОДОРОДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ПЕРЕСКОКОВ А.В.
НИУ«МЭИ», НИУ«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ», РОССИЯ

Рассмотрим задачу на собственные значения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ для нерелятивистского гамильтониана атома водорода в однородном магнитном поле

$$\mathbb{H} = -\Delta - \frac{1}{|x|} + \varepsilon \left(ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \varepsilon^2 \; \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}. \qquad (1)$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Задача об атоме водорода в магнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особый интерес представляют состояния системы (1), отвечающие границам спектральных кластеров, которые образуются около уровней энергии невозмущенного атома водорода.

Исследовать непосредственно гамильтониан $\mathbb{H}$ очень непросто из-за наличия у него кулоновской особенности. Для преодоления этой трудности к гамильтониану $\mathbb{H}$ предварительно применяется метод спинорной регуляризации Кустаанхеймо [1, 2]. С помощью этого метода уравнения кеплеровского движения сводятся к уравнениям движения гармонического осциллятора. Существует также обобщение спинорной регуляризации на случай атома водорода, находящегося в не зависящем от времени внешнем электромагнитном поле [3]. Путем спинорной регуляризации задача об атоме водорода в однородном магнитном поле сводится к задаче о четырехмерном ангармоническом осцилляторе.

Применим далее квантовый метод усреднения и выполним когерентное преобразование. В результате приходим к уравнению Гойна [4]. Собственными числами уравнения Гойна назовем такие значения параметра ξ, при которых это уравнение имеет полиномиальные решения в пространстве $\mathcal{P}[m,n]$ многочленов степени не выше $n-|m|-1$.

Наконец, воспользуемся общим методом построения асимптотики спектра около границ кластеров [5]. Он основан на новом интегральном представлении асимптотических собственных функций. Асимптотика искомого многочлена получается в результате проектирования асимптотического решения многоточечной спектральной задачи для уравнения Гойна на пространство $\mathcal{P}[m,n]$. Это решение находится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений.

Основным результатом данной работы является доказательство существования вблизи нижних границ спектральных кластеров серии собственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m + \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2 (n^2+m^2) + \varepsilon^2 n^2 (2k+1)\sqrt{5m^2-n^2} -$$

$$-\frac{1}{24}\varepsilon^4 n^6 (5n^4 + 98m^2n^2 - 7m^4) + O(n^{-9/2}),\ n\to\infty,\ k=0,1,2,\ldots. \quad (2)$$

Здесь числа $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \lesssim \varepsilon^{-7/2}$, $5^{-1/2}n < |m| < n$, а $\varepsilon \to +0$. Формула (2) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана) для атома водорода в магнитном поле.

Список литературы

[1] *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of Kepler motion // Ann. Univ. Turkuensis A. 1964. v. 73. no. 1. pp. 3–7.

[2] *Kustaanheimo P. and Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine und Angew. Math. 1965. v. 218. pp. 204–219.

[3] *Kibler M., Negadi T.* Hydrogen atom in a uniform electromagnetic field as an angarmonic oscillator // Lett. nuovo cim. 1984. v. 39. no. 14. pp. 319–323.

[4] *Карасев М. В., Новикова Е. М.* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ. 1996. Т. 108. No. 3. с. 339–387.

[5] *Перескоков А. В.* Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров // Тр. ММО. 2012. Т. 73. No. 2. с. 277–325.

E-mail address: pereskokov62@mail.ru