Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»

Кафедра Высшей математики

Программа дисциплины «Математические методы и модели исследования операций»

Автор программы:

Шнурков Петр Викторович

Одобрена на заседании кафедры «___» _______________ 2012 г.
Зав. кафедрой Четвериков В.М.

Рекомендована секцией УМС «___» _______________ 2012 г.

Утверждена УС факультета «___» _______________ 2012 г.

Москва 2012

Содержание комплекса

Пояснительная записка к курсу «Математические методы в экономике и исследование операций»

Введение

В современной математической науке понятие исследования операций определяется следующим образом: «Исследование операций – научный метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений. Важность количественного фактора в исследовании операций и целенаправленность вырабатываемых рекомендаций позволяют определить исследование операций как теорию принятия оптимальных решений» (Большой энциклопедический словарь «Математика», научное издательство «Большая Российская Энциклопедия», Москва, 1998, стр. 248).

Математически проблема прията оптимального решения чаще всего может быть выражена как задача оптимизации с ограничениями. Продолжим цитирование статьи «Исследование операций» из Большого энциклопедического словаря «Математика»: «Теоретически мыслимы задачи исследования операций с любыми множествами допустимых решений и с весьма произвольными критериями оптимальности. Последние могут иметь вид требований о максимизации (или минимизации) значений одной или нескольких числовых функций, значения которых выражают меру (степень) осуществления целей соответствующим допустимым решением. Каждая такая функция обычно называется целевой функцией. Если такая функция одна, то говорят о задаче математического программирования» (там же, стр. 249)

Теория математического программирования так же является весьма сложной и многообразной. «В математическом программировании чаще других рассматриваются задачи, в которых множество допустимых решений X есть подмножество конечномерного евклидова пространства E^n. Если при этом X – выпуклый многогранник с конечным числом вершин, а целевая функция f линейна, то имеют дело с задачами линейного программирования; если X – произвольно выпуклое множество, а f – выпуклая функция, подвергаемая минимизации, то имеют дело с задачей выпуклого программирования и т.д. Множество допустимых значений X может быть также подмножеством функционального пространства, и формально вариационное исчисление, а также круг вопросов, связанный с принципом максимума Понтрягина, могут быть также отнесены к оптимальному программированию. Задачи, в которых всякое допустимое решение конструируется в результате некоторого многошагового процесса, составляют предмет динамического программирования» (там же, стр. 250)

Таким образом, теория исследования операций является широкой и разнообразной областью современной математики. Для того, чтобы создать фундаментальный учебный курс в данной области, необходима общая концепция, которая должна лежать в его основе.

При разработке такой концепции я исходил из следующих основополагающих условий:

1. Предлагаемый курс должен быть фундаментальным и отражать наиболее общие и принципиальные результаты теории оптимизации.
2. Определяющим условием является также объем курса (лекционных семинарских и других видов занятий)

В связи с последним условием отмечу, что руководством факультета прикладной математики и математической экономики МИЭМ мне была предоставлена возможность прочитать курс «Математические методы и модели исследования операций» (6 и 7 семестры, 2 часа лекций и 1 час семинарских занятий в неделю в течение обоих семестров), а также курс «Теория оптимального управления» (7 семестр, 2 часа лекций в неделю, семинарских занятий нет). Оба указанных курса предназначались для потока студентов, обучающихся по специальности «Математические методы в экономике».

Исходя из указанных условий и того факта, что общая теория оптимизации в конечномерном евклидовом пространстве и теория линейного программирования читаются студентам данной специальности ранее, в течение 5 семестра, я предложил следующую концепцию обучения студентов по данному направлению.

Целесообразно рассматривать учебные курсы «Математические методы и модели исследования операций» (6 и 7 семестры) и «Теория оптимального управления» (7 семестр) как единый цикл дисциплин, посвященных основам математической теории оптимизации и управления. Отмечу при этом, что именно таким образом, как единая теория оптимизации и управления, рассматривается данная область математики в тех фундаментальных изданиях, которые приведены мною в списках литературы.

Основное содержание указанных учебных курсов можно описать следующим образом.

В курс «Математические методы и модели исследования операций» включаются, прежде всего, вспомогательные понятия и результаты из теории функций и функционального анализа, необходимые для изложения основных результатов теории оптимизации. Основную часть из них составляют основы теории дифференцируемости в функциональных пространствах. Далее, в этот курс входят основы теории экстремальных задач. В данном разделе для различных видов экстремальных задач формулируются и частично доказываются теоремы о необходимых условиях экстремума, а также излагаются общие алгоритмы исследования этих задач, нахождения допустимых экстремалей и решений.

Кроме этого, в курс «Математические методы и модели исследования операций» включаются разделы, посвященные теории вариационного исчисления. Заметим, что излагаются результаты как классического вариационного исчисления для задач с одним параметром оптимизации, так и современные результаты теории вариационного исчисления для задач с двумя параметрами оптимизации, которые непосредственно связаны с теорией оптимального управления.

В курс «Теория оптимального управления» включаются фундаментальные результаты по двум основным направлениям современной теории оптимального управления. Первое из них составляют теоретические утверждения и методы исследования, в основе которых находится принцип максимума Понтрягина. Второе направление содержит подробное изложение метода динамического программирования, основанного на принципе оптимальности Беллмана. При этом значительное внимание уделяется алгоритмическому содержанию теоретических результатов и изложению методов аналитического и численного исследования соответствующих задач оптимального управления.

Разрабатывая программы учебных курсов «Математические методы и модели исследования операций» и «Теория оптимального управления», я стремился к тому, чтобы изложить в них основы, которые составляют важную фундаментальную часть исследования операций. По объективным причинам эти учебные дисциплины являются сложными для изучения и восприятия. Однако я убежден, что они доступны, хотя и в разной степени, каждому студенту, обучающемуся по специальности «Математические методы в экономике», при условии, что он готов серьезно работать со сложными математическими проблемами.

П.В. Шнурков

Общая методическая характеристика дисциплины

Цели и задачи дисциплины

Целью преподавания данной дисциплины является получение фундаментальных знаний по основам теории экстремальных задач в нормированных пространствах, классического вариационного исчисления и оптимального управления.

Задача преподавания дисциплины состоит в создании у студентов устойчивого представления о современных математических методах оптимизации, используемых при анализе экономических и технических систем.

Требования к уровню освоения содержания дисциплины.

(требования к знаниям, умениям и навыкам, приобретенным в результате изучения дисциплины).

1) знание основных понятий, определений и теоретических результатов функционального анализа в объеме первого и второго разделов настоящего курса;

2) знание основных результатов теории экстремальных задач в произвольных нормированных (банаховых) пространствах, изложенных в третьем разделе курса;

3)знание необходимых условий экстремума в различных задачах классического вариационного исчисления (КВИ) и оптимального управления (ОУ), приведенных в соответствующих разделах курса;

4) умение применять полученные знания для решения конкретных экстремальных задач в конечномерных пространствах, задач КВИ и ОУ;

5) умение использовать учебную и учебно-научную литературу для уточнения и осмысления теоретических результатов, приведенных в настоящем курсе;

6) умение использовать учебные пособия для дополнительного изучения методики решения экстремальных задач в конечномерных пространствах, задач КВИ и ОУ;

7) навыки вычисления производных различных функционалов и отображений в нормированных и банаховых пространствах, приобретаемые на практических (семинарских) занятиях и в ходе выполнения контрольных работ и домашних заданий;

8) навыки самостоятельного решения различных видов экстремальных задач КВИ и ОУ, приобретаемые в ходе выполнения контрольных работ и домашних заданий.

Учебно-тематический план дисциплины

В первой графе таблицы указываются виды аудиторных и самостоятельных занятий студентов. Во второй графе указывается общая трудоемкость дисциплины в соответствии с ГОС ВПО, объем аудиторных и самостоятельных занятий – в соответствии с примерным учебным планом. В третьей и четвертой графе указываются номера семестров (если их два), в которых предусматривается каждый вид учебной работы и вид итогового контроля по дисциплине.

Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры	
		6	7
Общая трудоемкость дисциплины			
Аудиторные занятия	119	68	51
Лекции(Л)	68	34	34
Практические занятия(ПЗ)			
Семинары(С)	51	34	17
Лабораторные работы(ЛР)			
И (или) другие виды аудиторных занятий			
Самостоятельная работа	100	50	50
Курсовой проект(работа)	17	17	0
Расчетно-графические работы			
Реферат			
И (или) другие виды самостоятельной работы			
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)		зачет	экзамен

Разделы дисциплины и виды занятий

(допускается название п.2.1. «Тематический план»)

		Аудиторные занятия		
№п/п	Раздел дисциплины	Лекции	ПЗ (или С)	ЛР
1	Введение в дисциплину	2 час.	-	-
2	Предварительные сведения из функционального анализа	12 час.	-	-
3	Дифференцирование в функциональных пространствах	10 час.	22 час.	-
4	Основы теории экстремальных задач	10 час.	12 час.	-
5	Общая характеристика и постановки задач классического вариационного исчисления и оптимального управления	8 час.	-	-
6	Основы теории классического вариационного исчисления	14 час.	12 час.	-
7	Задача классического вариационного исчисления с двумя параметрами (задача Лагранжа)	8 час.	4 час.	-
8	Математическая связь задач классического вариационного исчисления и оптимального управления	4 час.	-	-

(В таблице названия разделов указываются в соответствие с обязательным минимумом содержания, изложенным в ГОС ВПО. В графах, означающих предусмотренные виды занятий проставляется «*»)

Содержание разделов дисциплины

(указывается название каждого раздела, количество часов, отводимое на изучение, и его содержание)

Раздел 1. Введение в дисциплину (2 часа).

Введение. Основная цель курса: изучение математических основ теории оптимизации для отображений, заданных на пространствах более сложной природы, чем конечномерные пространства. Общая структура курса. Анализ рекомендуемой литературы.

Раздел 2. Предварительные сведения из функционального анализа (12 часов).

Топологические пространства. Основные определения. Сходимость и предел последовательности. Непрерывность отображений. Аналогия с соответствующими свойствами в пространстве вещественных чисел R^1.

Линейные пространства и линейные операторы. Определение линейного топологического пространства. Свойство локальной выпуклости.

Определения нормы и нормированного пространства. Сходимость по норме. Свойство полноты. Банаховы пространства.

Примеры банаховых пространств. Пространства непрерывных вектор-функций и непрерывно дифференцируемых вектор-функций.

Понятие скалярного произведения. Пространства со скалярным произведением. Норма, порождаемая скалярным произведением. Гильбертовы пространства.

Взаимосвязи различных структур в функциональных пространствах.

Сопряженные пространства. Пространство, сопряженное к конечномерному линейному пространству X. Задание линейного непрерывного функционала на конечномерном линейном пространстве. Линейные непрерывные функционалы в гильбертовых пространствах.

Сопряженные операторы. Оператор, сопряженный к линейному непрерывному оператору в конечномерных пространствах.

Раздел 3. Дифференцирование в функциональных пространствах (10 часов).

Определение сильной производной. Сильные производные отображений в конечномерных пространствах. Свойства сильной производной. Теорема о производной сложной функции.

Определение слабой производной. Связь свойств сильной дифференцируемости, слабой дифференцируемости и непрерывных отображений.

Теорема о достаточных условиях сильной дифференцируемости.

Дополнительные результаты из функционального анализа (формулировки утверждений).

Раздел 4. Основы теории экстремальных задач (10 часов).

Общая постановка экстремальной задачи с ограничениями. Описание задачи. Понятие локального и глобального экстремумов.

Гладкая задача без ограничений. Теорема о необходимых условиях экстремума (принцип Ферма). Доказательство теоремы. Следствия из основной теоремы: необходимые условия экстремума для вариантов слабой и сильной дифференцируемости.

Гладкая задача с ограничениями в виде равенств. Теорема о необходимых условиях экстремума для гладкой задачи с равенствами в банаховых пространствах. Формулировка и доказательство теоремы. Структура необходимых условий; условия стационарности и условия регулярности. Замечания к теореме, анализ условий и утверждений.

Гладкая задача с конечным числом ограничений вида равенств. Доказательство на основе утверждения общей теоремы для банаховых пространств. Преобразование условий стационарности и условий регулярности.

Необходимые условия экстремума в гладкой конечномерной задаче с равенствами (классический вариант). Алгоритмический смысл необходимых условий . Условия регулярности в конечномерной задаче.

Гладкая задача с равенствами и неравенствами. Формулировка теоремы о необходимых условиях экстремума. Анализ необходимых условий стационарности и дополняющей нежесткости.

Выпуклая задача с неравенствами и нефункциональным ограничением (задача выпуклого программирования). Теорема Куна-Таккера. Особенности необходимых условий экстремума для выпуклых задач.

Раздел 5. Общая характеристика и постановки задач классического вариационного исчисления и оптимального управления (4 часа).

Задачи классического вариационного исчисления (КВИ) и оптимального управления как особые виды экстремальных задач. Составные части экстремальных задач КВИ и ОУ: целевые функционалы, ограничения, граничные условия.

Общая классификация задач КВИ и ОУ: задача Лагранжа, Больца и Майера.

Общие черты и основные отличия экстремальных задач КВИ и ОУ.

Конкретные постановки задач КВИ.

Конкретные постановки задач ОУ.

Формальные определения слабого и сильного экстремума. Связь слабого и сильного локального экстремума.

Математическое определение понятия решения задачи ОУ. Последовательное введение понятий: управляемый процесс, допустимый управляемый процесс, оптимальный управляемый процесс.

Раздел 6. Основы теории классического вариационного исчисления (14 часов).

Классическая задача Больца без ограничений. Простейшая векторная задача КВИ (задача с закрепленными концами траектории). Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка). Анализ необходимых условий.

Задача КВИ с граничными условиями общего вида. Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума.

Общая закономерность, связанная с разрешимостью экстремальных задач КВИ и ОУ.

Необходимое условие Вейерштрасса в простейшей задаче КВИ. Общее определение функции Вейерштрасса для произвольной непрерывно дифференцируемой функции. Геометрический смысл функции Вейерштрасса.

Теорема, в которой устанавливается, что условие Вейерштрасса является необходимым условием сильного минимума в простейшей задаче КВИ.

Необходимые условия второго порядка и достаточные условия в простейшей векторной задаче КВИ. Условие Лежандра в скалярном и векторном вариантах. Усиленные условия Лежандра. Уравнение Якоби в общей форме. Усиленное условие Якоби.

Основные результаты и их анализ. Теорема о необходимых условиях слабого минимума и достаточных условиях сильного минимума в простейшей векторной задаче. Теорема о достаточных условиях слабого минимума в простейшей векторной задаче. Замечания и комментарии к сформулированным теоремам.

Раздел 7. Задачи классического вариационного исчисления с двумя параметрами (задача Лагранжа). (10 часов).
Общая (основная) постановка задачи Лагранжа с векторными параметрами (x(t), u(t)) в классическом варианте с дифференциальной связью и с граничными условиями. Вспомогательные объекты для исследования задачи Лагранжа как экстремальной задачи с ограничениями: лагранжиан и функция Лагранжа. Множители Лагранжа в рассматриваемой задаче, их математическая природа. Теорема о необходимых условиях экстремума.
Анализ необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа.
Вычисление производных лагранжиана задачи по векторным параметрам $x, \dot{x}, u$ на основе теоретических результатов, полученных на семинарских занятиях. Новая форма необходимых условий, состоящая из трех основных частей: сопряженное уравнение как дифференциальное уравнение относительно сопряженной переменной; условия трансверсальности как граничные условия к сопряженному уравнению; условие стационарности по параметру u как некоторое функциональное уравнение относительно параметра u(t).
Обобщенная задача Лагранжа с дополнительными ограничениями. Постановка задачи Лагранжа с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств, задаваемых интегрально-терминальными (смешанными) функционалами от параметров x(t), u(t).
Связь с результатами общей теории экстремальных задач.

Раздел 8. Математическая связь задач классического вариационного исчисления и оптимального управления. (6 часов).
Сравнительная характеристика задачи КВИ с двумя параметрами (задачи Лагранжа) и общей задачи оптимального управления с непрерывным временем. Формулировка задачи Лагранжа с дифференциальной связью и граничными условиями и задачи оптимального управления с дифференциальной связью, граничными условиями и ограничениями на управление.
Аналитическое сравнение необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа и в общей задаче оптимального управления.
Формулировка необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа (теоретическая лагранжева форма) и необходимых условий экстремума в задаче оптимального управления (принцип максимума в форме Лагранжа).

Понедельный план проведения лекционных и практических занятий.

План лекционных занятий

6 семестр.

Раздел 1. Введение в дисциплину.

Лекция 1. Введение. Основная цель курса: изучение математических основ теории оптимизации для отображений, заданных на пространствах более сложной природы, чем конечномерные пространства (например, на пространствах функций).

Общая структура курса. Основные разделы, изучаемые в 6 и 7 семестрах, их краткая характеристика. Связь с курсом «Теория оптимального управления».

Анализ рекомендуемой литературы.

Раздел 2. Предварительные сведения из функционального анализа.

Лекция 2. Топологические пространства. Определения топологии и топологического пространства. Понятия открытого множества и окрестности. Идея связи непрерывности и топологии.

Сходимость и предел последовательности. Непрерывность отображений в топологических пространствах. Теорема о необходимых и достаточных условиях непрерывности.

Топологические структуры в пространстве R^1 (открытые множества, окрестности). Сходимость и непрерывность в R^1 «на языке $\varepsilon - \delta$ ».

Лекция 3. Линейные пространства. Определение линейного пространства. Линейное подпространство. Линейный оператор. Ядро линейного оператора..

Линейные топологические пространства (л.т.п.). Определение линейного топологического пространства и его сущность. Локально выпуклые л.т.п. Теорема существования выпуклой окрестности точки x, вложенной в произвольную окрестность данной точки (без доказательства).

Лекция 4. Нормированные пространства. Понятие нормы в линейном пространстве.

Аксиомы нормы. Задание расстояния между элементами пространства (точками) при помощи нормы. Понятие открытого шара. Задание топологии в нормированном пространстве через систему открытых шаров. Окрестности точки в нормированном пространстве.

Сходимость и предел последовательности в нормированном пространстве. Фундаментальная последовательность. Понятие полноты нормированного пространства. Банахово пространство как полное нормированное пространство.

Примеры банаховых пространств. Особо важные виды пространств: пространство $C^n([t_0,t_1])$ непрерывных вектор-функций и пространство $C^n_k([t_0,t_1])$ k раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций, заданных на интервале времени $t \in [t_0, t_1]$.

Пространства со скалярным произведением (евклидовы пространства). Скалярное произведение в линейном пространстве. Норма, порождаемая скалярным произведением. Проверка аксиом нормы. Неравенство Коши-Буняковского (доказательство) Гильбертово пространство.

Лекция 5. Взаимосвязи различных структур в функциональных пространствах.

Общая характеристика взаимосвязи введенных структур, включая структуры в конечномерных вещественных пространствах. Схема взаимосвязей (иллюстрация) с указанием структур для различных понятий дифференцируемости (слабой, сильной, классической).

Лекция 6. Сопряженные пространства.

Понятие сопряженного пространства. Линейные операции и норма в пространстве линейных непрерывных функционалов (л.н.ф.). Сильная топология.

Пространство, сопряженное к конечномерному линейному пространству X. Задание линейного непрерывного функционала на X. Общие выводы о структуре сопряженного пространства X* и представлении л.н.ф. в виде скалярного произведения.

<u>Лекция 7</u>. Линейные непрерывные функционалы в гильбертовых пространствах. Теорема Ф.Рисса (без доказательства). Аналогия с конечномерным линейным пространством.

Специальные обозначения для сопряженных пространств и их элементов. (л.н.ф.): $\langle x^*, x\rangle = f(x), x \in X$, $f : X \to R$ - линейное непрерывное отображение.

Сопряженные операторы. Определение сопряженного оператора. Линейный непрерывный оператор (л.н.о.) в конечномерных пространствах, связь с представлением л.н.ф. Пусть $X=R^m$, $Y=R^n$, тогда произвольный л.н.о. $\Lambda: R^m \to R^n$ задается матрицей $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}$. Утверждение: оператор, сопряженный к Λ, задается транспонированной матрицей $A^T=A^*$. Подробное доказательство.

<u>Раздел 3.</u> Дифференцирование в функциональных пространствах.

<u>Лекция 8.</u> Сильное дифференцирование (производная Фреше). Определение сильной производной отображений в банаховых пространствах. Идея сильной производной, как линейного непрерывного оператора. Свойство непрерывной дифференцируемости отображений (гладкость первого порядка). Свойство регулярности отображения.
Сильные производные отображений в конечномерных пространствах, аналитическое задание соответствующих линейных непрерывных операторов.
Классическое понятие производной в конечномерных пространства как частный случай общего понятия сильной производной.

<u>Лекция 9.</u> Свойства сильной производной.
1) производная постоянной функции. Доказательство.
2) Производная линейного непрерывного отображения. Доказательство.
3) Производная линейной комбинации отображений. Формулировка и доказательство теоремы.
4) Производная сложной функции (производная композиции двух отображений). Теорема о производной сложной функции. Формулировка и доказательство теоремы.

<u>Лекция 10.</u> Слабое дифференцирование (производная по Гато). Понятие первой вариации по Лагранжу. Определение слабой производной на основе понятия первой вариации. Второе (непосредственное) определение понятия слабой производной. Идея слабой производной как линейного непрерывного оператора.
Теорема о связи свойств существования первой вариации по Лагранжу, слабой дифференцируемости, сильной дифференцируемости и непрерывности.

<u>Лекция 11.</u> Продолжение исследований связи свойств слабой дифференцируемости, сильной дифференцируемости и непрерывности отображения.
Пример отображения, слабо дифференцируемого и не являющегося непрерывным в заданной точке. (Построение и подробный анализ).
Теорема о достаточных условиях сильной дифференцируемости (без доказательства). Замечания о возможности применения данной теоремы.

<u>Лекция 12.</u> Некоторые фундаментальные результаты функционального анализа, необходимые для доказательства основных теорем общей теории экстремальных задач.

Лемма о биортогональном базисе. Теорема Хана-Банаха. Следствие: аннулятор замкнутого подпространства содержит ненулевой элемент. Объяснение и анализ результата. Теорема отделимости. Теорема Банаха об открытом отображении и обратном операторе. Лемма об аннуляторе ядра оператора.

Касательные векторы и касательные подпространства (определения).

Теорема Люстерника. Формулировка и геометрический смысл теоремы.

Раздел 4. Основы теории экстремальных задач.

Лекция 13. Общая постановка экстремальной задачи с ограничениями. Целевой функционал. Виды ограничений: равенства, неравенства, нефуннкциональные ограничения. Общее понятие локального и глобального экстремума.
Гладкие задачи без ограничений (общая постановка задач). Теорема о необходимых условиях экстремума в гладкой задаче без ограничений (принцип Ферма). Формулировка и доказательство теоремы в наиболее общих условиях (существование первой вариации по Лагранжу). Следствия из основной теоремы: необходимые условия экстремума для вариантов сильной и слабой дифференцируемости. Классический результат: необходимые условия экстремума (условия стационарности) в конечномерном пространстве.

Лекция 14. Гладкие задачи с ограничениями вида равенств (гладкие задачи с равенствами). Общая погстановка задачи в банаховых пространствах. Функция Лагранжа и ее особенности. Множители Лагранжа.
Теорема о необходимых условиях экстермума для гладкой задачи с равенствами в банаховых пространствах. Формулировка теоремы.
Анализ утверждений теоремы о необходимых условиях экстремума в гладкой задаче с равенствами. Условия стационарности и условия регулярности, их теоретическое и прикладное значение. Общая схема исследования задачи и нахождения точки, удовлетворяющей необходимым условиям и ограничениям (допустимой экстремали).
Схема доказательства теорем о необходимых условиях экстремум в гладкой задаче с равенствами.

Лекция 15. Гладкие задачи с конечным числом ограничений вида равенств в банаховом пространстве. Постановка задачи. Функция Лагранжа. Множители Лагранжа.
Теорема о необходимых условиях экстремума в гладкой задаче с конечным числом ограничений вида равенств. Доказательства на основе утверждений теоремы для общей задачи с равенствами в банаховых пространствах (лекция 14). Вывод условий стационарности и регулярности.

Лекция 16. Гладкие задачи с равенствами в конечномерных пространствах (классический вариант). Теорема о необходимых условиях экстремума в гладкой конечномерной задаче с равенствами. Условия стационарности и регулярности в конечномерной задаче с равенствами.
Система уравнений относительно неизвестных параметров в гладкрой конечномерной задаче с равенствами. Алгоритмический смысл необходимых условий экстремума.

Гладкие задачи с равенствами и неравенствами. Теорема о необходимых условиях экстремума (без доказательства). Анализ необходимых условий стационарности и дополняющей нежесткости. Характер условий регулярности и определение параметра λ_0.

Лекция 17. Выпуклые задачи с неравенствами и нефункциональными ограничениями.

Постановка выпуклой задачи с неравенствами и нефункциональными ограничениями. Функция Лагранжа, не включающая в себя нефункциональные ограничения.

Теорема Куна-Таккера. Формулировка теоремы. Анализ утверждений теоремы. Особенности необходимых условий экстремума: условие стационарности выполняется в усиленной форме , когда функция Лагранжа достигает экстремума. Условие Слейтера и его особая роль. Формулировка достаточных условий экстремума в выпуклой задаче с неравенствами и нефункциональными ограничениями. Доказательство теоремы Кун-Таккера.

7 семестр. Задачи классического вариационного исчисления и оптимального управления.

Раздел 5. Общая характеристика и постановки задач классического вариационного исчисления и оптимального управления.

Лекция 1. Задачи классического вариационного исчисления (КВИ) и оптимального управления как особые виды экстремальных задач, заданных на множествах функций $x(t)=(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $u(t)=(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$, где $x(t)=(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ – состояния системы, а $u(t)=(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$ – управления системой (управляющие переменные), $t \in [t_0, t_1]$ - параметр времени.
Составные части экстремальных задач КВИ и ОУ: целевые функционалы, ограничения, граничные условия. Основные виды функционалов, ограничений и граничных условий. Общая классификация задач КВИ и ОУ: задача Лагранжа, Больца и Майера.

Лекция 2. Общая постановка экстремальной проблемы, включающей в себя основные виды задач КВИ и ОУ. Общие черты и основные отличия экстремальных задач КВИ и ОУ. Конкретные постановки задач КВИ. Задачи с одним (векторным) параметром: задача Больца без ограничений, простейшая векторная задача, общая задача с граничными условиями. Задача с двумя (векторными) параметрами: задача Лагранжа.
Конкретные постановки задач ОУ. Общая задача ОУ с подвижными концами интервала времени. Классическая задача ОУ с фиксированными концами интервала времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

Лекция 3.Задачи КВИ с одним параметром. Математическое определение понятия решения. Пространство функций $C_1^n([t_0,t_1]), C^n([t_0,t_1])$ (краткая характеристика). Определения нормы в функциональных пространствах $C_1^n([t_0,t_1]), C^n([t_0,t_1])$ и связанные с нормой каждого вида понятия окрестностей. Формальные определения слабого и сильного локального экстремума. Связь слабого и сильного локального экстремума.
Задача КВИ с двумя параметрами. Математическое определение понятия решения. Формальные определения слабого и сильного экстремума. Связь слабого и сильного локального экстремума.

Лекция 4. Общая задача ОУ. Необходимый предварительный анализ. Основные особенности задач ОУ, порожденные объективной реальностью: аналитические свойства функций состояний (траекторий) x(t), $t \in [t_0, t_1]$ и управлений u(t), $t \in [t_0, t_1]$.
Математическое определение понятия решения задачи ОУ. Последовательное введение понятий: управляемый процесс, допустимый управляемый процесс, оптимальный управляемый процесс. Оптимальный управляемый процесс как сильный локальный экстремум. Сущность введенного понятия оптимальности.

Раздел 6. Основы теории классического вариационного исчисления.

Лекция 5. Классическая задача Больца без ограничений. Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка). Схема доказательства, основанная на использовании теоретических результатов, полученных на семинарских занятиях в курсе «Математические методы и модели исследования операций» (6 семестр, задача 6, 10; контрольная работа, задача 2). Вывод необходимых условий экстремума: уравнения Эйлера, условий трансверсальности.

Лекция 6. Классическая задача Больца без ограничений. Развернутая (покоординатная) форма необходимых условий. Алгоритмический смысл необходимых условий экстремума.

Простейшая векторная задача КВИ (задача с закрепленными концами траектории). Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка). Анализ необходимых условий.

Лекция 7. Задача КВИ с граничными условиями общего вида. Постановка задачи. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка). Доказательство теоремы о необходимых условиях экстремума. Особенности необходимых условий экстремума: уравнения Эйлера и условий трансверсальности.

Лекция 8. Задача КВИ с граничными условиями общего вида (продолжение). Закономерности, связанные с условиями трансверсальности.
Анализ экстремальной задачи с ограничениями на примере задачи КВИ с граничными условиями общего вида. Составление системы соотношений, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи. Исследование полученной системы. Понятия экстремали и допустимой экстремали. Алгоритмический смысл необходимых условий. Общая закономерность, связанная с разрешимостью экстремальных задач КВИ и ОУ.

Лекция 9. Необходимое условие Вейерштрасса в простейшей задаче КВИ. Общее определение функции Вейерштрасса для произвольной непрерывно дифференцируемой функции. Геометрический смысл функции Вейерштрасса. Многомерный вариант функции.
Функция Вейерштрасса в простейшей векторной задаче КВИ. Теорема, в которой устанавливается, что условие Вейерштрасса является необходимым условием сильного минимума в простейшей задаче КВИ. Идея доказательства теоремы: метод игольчатых вариаций Вейерштрасса.

Лекция 10. Необходимые условия второго порядка и достаточные условия в простейшей векторной задаче КВИ. Предварительные результаты.
Вспомогательные функциональные матрицы частных производных второго порядка от интегранта функционала.
Условие Лежандра в скалярном и векторном вариантах. Усиленные условия Лежандра.
Уравнение Якоби в общей форме. Уравнение Якоби, разрешенное относительно старшей производной. Фундаментальное решение уравнения Якоби для скалярного и векторного вариантов.
Условие Якоби в скалярном и векторном вариантах (формулировки). Усиленное условие Якоби.
Условие квазирегулярности функционала в простейшей задаче.

Лекция 11. Необходимые условия второго порядка и достаточные условия экстремума в простейшей векторной задаче КВИ. Основные результаты и их анализ.
Теорема о необходимых условиях слабого минимума и достаточных условиях сильного минимума в простейшей векторной задаче. Формулировка теоремы. Усиленный вариант теоремы для целевого функционала специального вида.
Теорема о достаточных условиях слабого минимума в простейшей векторной задаче (формулировка).
Замечания и комментарии к сформулированным теоремам. Соотношение необходимых и достаточных условий слабого и сильного минимумов. Различные условия гладкости в простейшей задаче. Проблема применения полученных теоретических результатов.

Раздел 7. Задачи классического вариационного исчисления с двумя параметрами (задача Лагранжа).

Лекция 12. Общая (основная) постановка задачи Лагранжа с векторными параметрами (x(t), u(t)) в классическом варианте с дифференциальной связью и с граничными условиями. Вспомогательные объекты для исследования задачи Лагранжа как экстремальной задачи с ограничениями: лагранжиан и функция Лагранжа. Множители Лагранжа в рассматриваемой задаче, их математическая природа. Теорема о необходимых условиях экстремума (формулировка).
Схема доказательства теоремы о необходимых условиях экстремума, основанная на представлении исходной задачи Лагранж в форме задачи с ограничениями вида равенств в банаховом пространстве и применении соответствующей общей теоремы о необходимых условиях экстремума (правила множителей Лагранжа).
Предварительный анализ необходимых условий, их теоретический характер.

Лекция 13. Анализ необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа.
Предварительные замечания. Вычисление производных лагранжиана задачи по векторным параметрам $x, \dot{x}, u$ на основе теоретических результатов, полученных на семинарских занятиях в курсе «Математические методы и модели исследования операций» (6 семестр, задача 5; контрольная работа, задача 1). Представление необходимы условий экстремума в преобразованной форме, предназначенной для аналитического исследования. Новая форма необходимых условий, состоящая из трех основных частей: сопряженное уравнение как дифференциальное уравнение относительно сопряженной переменной; условия трансверсальности как граничные условия к сопряженному уравнению; условие стационарности по параметру u как некоторое функциональное уравнение относительно параметра u(t). Развернутая (координатная) форма необходимых условий как систем соотношений (уравнений).

Лекция 14. Анализ необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа (продолжение).
Составление общей системы соотношений (уравнений) относительно неизвестных параметров в задаче Лагранжа, включающей в себя необходимые условия и ограничения исходной задачи. Алгоритмический смысл необходимых условий: соответствие числа и характера неизвестных параметров числу и характеру соотношений, входящих в полученную общую систему. Алгоритмическое описание последовательности действий при решении общей системы уравнений.

Лекция 15. Обобщенная задача Лагранжа с дополнительными ограничениями. Постановка задачи Лагранжа с дополнительными ограничениями в виде равенств и неравенств, задаваемых интегрально-терминальными (смешанными) функционалами от параметров x(t), u(t). Формулировка утверждения о системе необходимых условий в обобщенной задаче. Анализ полученной системы необходимых условий. Связь с результатами общей теории экстремальных задач. Алгоритмический смысл необходимых условий.

Раздел 8. Математическая связь задач классического вариационного исчисления и оптимального управления.

Лекция 16. Сравнительная характеристика задачи КВИ с двумя параметрами (задачи Лагранжа) и общей задачи оптимального управления с непрерывным временем. Формулировка задачи Лагранжа с дифференциальной связью и граничными условиями и задачи оптимального управления с дифференциальной связью, граничными условиями и ограничениями на управление. Соответствие структуры и составных частей двух экстремальных задач. Сравнение аналитических условий на функции, определяющие этим экстремальные задачи. Соотношение необходимых условий экстремума в данных экстремальных задачах.

Лекция 17. Аналитическое сравнение необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа и в общей задаче оптимального управления.
Формулировка необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа (теоретическая лагранжева форма) и необходимых условий экстремума в задаче оптимального управления (принцип максимума в форме Лагранжа). Возможности преобразования необходимых условий в обеих задачах. Соотношения между всеми составными частями необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа и задаче оптимального управления.

План семинарских занятий

6 семестр.

Занятие 1.

Вводные замечания. Распределение материала между лекциями и практическими занятиями. Самостоятельная работа в семестре. Литература, связанная с практическими занятиями.

Раздел 1. Дифференцирование в функциональных пространствах (краткие теоретические сведения). [Раздел 3 теоретического курса]

Сильное дифференцирование (производная Фреше). Определение. Сильная производная отображений, действующих в конечномерных пространствах. Основные свойства сильной производной.

Занятие 2. Дифференцирование в функциональных пространствах (завершение изложения теоретического материала).

Слабое дифференцирование (производная Гато). Два определения слабой производной. Первая вариация по Лагранжу. Связь свойств сильной дифференцируемости, слабой дифференцируемости и непрерывности. Теорема о достаточных условиях сильной дифференцируемости.

Раздел 2. Вычисление производных различных функционалов и отображений. [Раздел 3 теоретического курса]

Занятие 3.

Задача 1. Производная аффинного отображения. Пусть X, Y - банаховы пространства, л $\Lambda: X \to Y$ – л.н.о., $a \in Y$, $F(x) = \Lambda x + a$. Тогда $F'(x) = \Lambda$.

Задача 2. Билинейные функции.

Пусть X - банахово пространство, $B(x_1, x_2)$ – непрерывная билинейная функция, $x_1, x_2 \in X$;

$B: X \times X \to R$, $Q(x) = B(x,x)$ - квадратичная форма, $Q'(x)h = B(x,h) + B(h,x)$ (линейный непрерывный оператор); $B(h,h) = r(h)$ - малый добавок,

$\frac{1}{\|h\|}|B(h,h)| = \|h\| \left| B\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) \right| \to 0$. Если

$B(x_1, x_2) = B(x_2, x_1)$, то есть функция симметрична, то $Q'(x)h = 2B(x,h)$.

Задача 3. Пусть X - гильбертово пространство, общий вид квадратичной формы $Q(x) = \frac{1}{2}(\Lambda x, x)$, свойство оператора $\Lambda: X \to X$ таково: $(\Lambda x, y) = (x, \Lambda y)$ ($\Lambda = \Lambda^*$ - самосопряженный оператор). Тогда производная Фреше $Q'(x)h = (\Lambda x, h)$; $Q'(x)$ задается вектором Λx .

Задача 4. Норма в гильбертовом пространстве.

X - гильбертово, $f: X \to R$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Найти производную Фреше $f'(x)$.

Занятие 4.

Задача 5. Пусть X, Y – банаховы пространства, $F: X \to Y$, $y^* \in Y^*$, $\exists F'(x)$ – сильная производная. Введем отображение $\gamma: X \to R$,

$\gamma(x) = \langle y^*, F(x)\rangle$. Найти сильную производную $\gamma'(x)$.

Занятие 5.

Задача 6. Пусть [illegible]

Зафиксируем $x_0 \in R^n$ и окрестность $U = U_{x_0}$. Предположим, что $h(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности U по всем компонентам $x = (x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим отображение

$H_\tau : C^n([t_0, t_1]) \to R^m$, $\tau \in [t_0, t_1]$ фиксированное

$H_\tau(x(\cdot)) = h(x(\tau))$ [illegible]

Отображение H_τ определено при всех $x(\cdot) \in C^n([t_0, t_1])$, для которых $x(\tau) \in U$. Пусть [illegible]. Найти производную Фреше $H_\tau'(x_0(\cdot))$.

Задача 7. Пусть [illegible] функция $g(t, x)$ – определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по x. Рассмотрим отображение [illegible]. Найти сильную производную $G'(x_0(\cdot))$.

Занятие 6.

Задача 8. Пусть [illegible].

[illegible] - определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по x, u (по всем компонентам). Рассмотрим отображение

[illegible], [illegible],

[illegible]. Найдем производную Фреше $\Phi'(x_0(\cdot), u_0(\cdot))$.

Занятие 7.

Задача 9. Пусть [illegible] - определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по x, y. Рассмотрим отображение [illegible].

[illegible]. Найти производную Фреше $M'(x_0(\cdot))$.

Список рекомендуемой литературы

Основная:

1) Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
2) Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.
3) Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.
4) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2004.

Дополнительная:

1) Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2) Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1998.
3) Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
4) Беллман. Р., Гликберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
5) Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
6) Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.
7) Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 1999.
8) Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1989.
9) Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-пресс, 2002.
10) Основы теории оптимального управления. Под редакцией В.Ф. Кротова. – М.: Высшая школа, 1990.
11) Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
12) А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006